Halina Mazurek
nauczyciel kształcenia zintegrowanego
Szkoły Podstawowej nr 8
im. J. Kawalca w Rudzie Śląskiej

Koncepcja czynnościowego nauczania matematyki – jej źródła, fundamentalne zasady, przykłady ćwiczeń

Jedną z najskuteczniejszych metod kształtowania pojęć matematycznych jest koncepcja czynnościowego nauczania tego przedmiotu. Koncepcja ta odchodzi od wskazań nauczania mechanistycznego, kładącego nacisk przede wszystkim na wyuczenie reguł, a także na ćwiczenie umiejętności rozwiązywania zadań bez dokładnego ich rozumienia. Dystansuje się również od zasad nauczania empirycznego, którego celem jest nauczanie rozwiązywania praktycznych zadań, radzenia sobie „po swojemu”, aby tylko osiągnąć pozytywny skutek.
Nauczanie czynnościowe cechuje: wielka dbałość o precyzję i porządek o jasność i dobre zrozumienie pojęć matematycznych, o zgodność pojęć szkolnych z pojęciami naukowymi.
Podstawą działalności matematycznej ucznia jest zrozumienie pojęć i twierdzeń, a z kolei główną działalnością jest rozwiązywanie zadań. Celem nadrzędnym tej metody jest to, aby uczeń zdobywał wiedzę operatywną.
Koncepcja czynnościowego nauczania matematyki opiera się z jednej strony na podstawach metodologicznych matematyki jako nauki, z drugiej zaś na psychologii procesu kształtowania się pojęć u dziecka. W szczególności koncepcja czynnościowego nauczania matematyki znalazła uzasadnienie psychologiczne w teorii rozwoju intelektualnego J. Piageta. W teorii tej wyróżnia się cztery stadia rozwoju następujące po sobie w jednakowym porządku u wszystkich dzieci.

1. Stadium inteligencji sensoryczno-motorycznej(do drugiego roku życia)

Pod koniec tego okresu dziecko posiada już pewną wiedzę o związkach przyczynowo-skutkowych. Wie, że działania mają swoje następstwa i, że eksperymentując przedmiotami może zaspokoić ciekawość i poznać ich właściwości. Wszystkie jednak działania dziecka mają charakter konkretny.
Rozwój dziecka na tym etapie odbywa się na płaszczyźnie praktycznej, a inteligencję osiąganą przez nie określa się tzw. inteligencją praktyczną.

2. Stadium inteligencji przedoperacyjnej(od 2 roku do 6-7 lat)

W tym okresie życia inteligencja staje się bardziej zinterioryzowana(uwewnętrzniona). Czynności konkretne są jednak w tym okresie nieodwracalne, dzieci nie potrafią z myśli poprzez czynność odwrotną powrócić do sytuacji wyjściowej, druga czynność nie wiąże się u nich logicznie z pierwszą. Cechą charakterystyczną tego okresu jest myślenie intuicyjne, a rozumowanie opiera się przede wszystkim na spostrzeganiu które ogranicza się tylko do jednego aspektu zdarzenia czy sytuacji nie uwzględniając równocześnie innych.

3. Stadium inteligencji konkretno-operacyjnej(6-7 lat)

Etap ten jest „operacyjny”, bowiem możliwe jest wykonywanie operacji odwrotnych, nawet pod nieobecność konkretnych przedmiotów i zdarzeń. Operacje konkretne związane są bardzo

ściśle z czynnościami na przedmiotach oraz ze spostrzeganiem. Możliwe są przekształcenia wykonywane w świecie realnych fizycznych czynności, a także w świecie czynności pomyślanych-wykonywanych w umyśle.
Dziecko porządkuje przedmioty, klasyfikuje, dostrzega wspólne własności, układa w serie. Inteligencja konkretno-operacyjna jest bardziej ruchliwa od inteligencji sensomotorycznej, a myślenie operacyjne jest bardziej nastawione na wyjaśnianie i rozumienie.
4. Stadium inteligencji formalno-operacyjnej(od 11-12 lat)

Inteligencja charakteryzuje się zdolnością do przeprowadzania logicznego rozumowania. Na tym etapie dokonuje się uogólnień formułuje wnioski na drodze dedukcji lub w oparciu o systematyczne eksperymenty. Wszelkiego rodzaju operacje formalne, abstrakcyjne charakteryzują wysoki stopień odwracalności. Zgodnie z koncepcją teoretyczną sformułowaną przez Piageta, w młodszym wieku szkolnym dziecko znajduje się w okresie kształtowania i reorganizowania operacji konkretnych. Cechą podstawową stadium operacji konkretnych jest ich zależność od treści, na których są dokonywane. Charakterystyczne jest też istnienie i funkcjonowanie różnych schematów konkretno-operacyjnych. Myślenie dzieci w młodszym wieku szkolnym cechuje konkretyzm, obrazowość. Znajduje się one na poziomie poznania praktycznego, opartego na bezpośrednim spostrzeganiu.
Myślenie jest ściśle związane z działaniem wykonywanym rzeczywiście rękoma.
W oparciu o prace J. Piageta A. Z. Krygowska opracowała teoretyczne podstawy koncepcji nauczania czynnościowego, zakładając, że prawidłowy rozwój myślenia matematycznego wymaga odpowiedniego przygotowania.
Obejmuje ono organizację czynności dziecka przy wykorzystaniu odpowiednio dobranych środków dydaktycznych. Należy podkreślić, że dobór tych czynności jest uwarunkowany analizą psychologiczną podstawowych operacji, które wchodzą w skład struktury materiału zawartego w programie nauczania matematyki.
Początkowo czynności te mają formę zabawową, później zostają stopniowo zinterioryzowane, zastąpione słowami, symbolami lub odpowiednimi schematami, którymi dziecko operuje w podobny sposób jak czyniło to na konkretnych przedmiotach.
Czynnościowe nauczanie matematyki opiera się na dwóch fundamentalnych zasadach, a więc:

1. Na wydobyciu przez analizę teoretyczną z materiału nauczania podstawowych operacji w każdej definicji, twierdzeniu, dowodzie.
2. Na świadomym organizowaniu sytuacji problemowych sprzyjających procesowi interioryzacji i kształtowaniu myślenia matematycznego ucznia jako specyficznego działania, jako swobodnego i świadomego posługiwania się przyswajanymi stopniowo operacjami oraz na konsekwentnym stosowaniu zabiegów dydaktycznych mających na celu zapewnienie prawidłowości i efektywności tego procesu, m.in. przez:

   a) wiązanie treści matematycznych z wyraźnie formułowanymi schematami postępowania
   b) wiązanie operacji z operacjami do nich odwrotnymi
   c) wiązanie operacji z różnych dziedzin matematyki w bardziej złożone schematy
   d) uwzględnienie różnych ciągów operacji doprowadzających do tego samego rezultatu
   e) stwarzanie wobec uczniów sytuacji konfliktowych i przeciwstawnych w których opanowane schematy postępowania są zawodne lub nieskuteczne i w których uczniowie muszą dokonać transformacji(adaptacji) poznanego schematu lub wypracować schemat nowy
   f) wymaganie od dzieci słownego opisywania operacji wykonywanych lub przewidywanych do samodzielnego wykonania

g) celowe integrowanie czynności konkretnych uczniów z operacjami myślowymi, przy czym czynności te mogą być traktowane jako:
   - źródło procesu interioryzacji, w którym jako jej rezultat powstaje odpowiednio wywołana operacja myślowa
   - operacje wykonywane równolegle z operacjami myślowymi
   - konkretna weryfikacja ustalonego teoretycznie ciągu operacji myślowych
h) systematyczne i konsekwentne stwarzanie sytuacji wymagających od ucznia swobodnego i operatywnego posługiwania się poznanymi operacjami
i) zwracanie uwagi na to, aby stosowana symbolika miała również charakter operatywny, aby wizualnie sugerowała określoną operację
j) przyzwyczajanie uczniów do planowania swoich czynności w rozwiązywaniu sytuacji zadaniowych

Z przedstawionych powyżej zasad wynika, że chcąc opracować jakieś pojęcie zgodnie z metodologicznymi podstawami koncepcji nauczania czynnościowego należy wyróżnić ciąg czynności sensomotorycznych(manipulowanie i spostrzeganie), intelektualnych(operacje myślowe), werbalnych(słowne formułowanie swoich myśli).
Na szczeblu nauczania początkowego nauczanie matematyki powinno polegać na organizowaniu samodzielnego działania uczniów i stopniowym wykrywaniu przez dzieci reguł, które to działanie optymalizują i intensyfikują. Tak więc psychologia czynności wskazuje na konieczność respektowania procesu interioryzacji prowadzącego od czynności konkretnych wykonywanych na przedmiotach poprzez czynności wyobrażeniowe do operacji abstrakcyjnych. W miarę rozwoju czynności ruchowych(konkretnych) najprostsze formy zachowania się dziecka wzbogacają się przez coraz większy udział procesów myślowych i wyobrażeniowych. W proces ten włącza się coraz wyraźniej mowa i myślenie.
Nauczanie czynnościowe matematyki zapewnia optymalizację procesu nauczania na szczeblu nauczania początkowego, łączy bowiem elementy 4 grup metod nauczania pozwalając na celowe i świadome organizowanie przez nauczyciela aktywności uczniów. Metody te są z kolei przyporządkowane 4 drogom uczenia się:
- przez przyswajanie
- przez odkrywanie
- przez przeżywanie
- przez działanie

Zgodne to jest z koncepcją wielostronnego nauczania – uczenia się.
W toku uczenia się przez odkrywanie na szczególną uwagę zasługują metody problemowe zwane poszukującymi, aktywizującymi lub zadaniowymi oraz gry dydaktyczne. Umożliwiają one uczniom poszukiwanie wiedzy w toku ich własnej wielostronnej aktywności wywołanej sytuacją zadaniową lub problemową.
Zdaniem J. Piageta nie można oddzielić procesu uczenia się od przedmiotu. Ponadto, aby zrozumieć jak dziecko uczy się liczb musimy w szczególny sposób badać liczby i strukturę tych liczb.
H. Siwek w książce „Czynnościowe nauczanie matematyki”(1998) wyróżnia na podstawie szczegółowych wskazań zapewniających efektywność kształcenia z użyciem metody czynnościowego nauczania matematyki następujące rodzaje ćwiczeń:
1. Ćwiczenia „wprost”, w których uczeń ma wykonać prostą czynność lub ciąg czynności prowadzących do konstrukcji np. desygnatów pojęcia
2. Ćwiczenia odwrotne do poprzednich – wymagające czynności odwrotnej lub ciągu czynności odwrotnych do poprzednich

3. Ćwiczenia tej samej czynności myślowej na różnych materiałach w różnych położeniach, z zastosowaniem różnych zmiennych w różnych sytuacjach
4. Ćwiczenia prowadzące do różnych ciągów czynności o tym samym rezultacie, różne sposoby rozwiązania, racjonalny wybór schematu jako najbardziej odpowiedniej i najbardziej ekonomicznej drogi wiodącej do rozwiązania
5. Ćwiczenia w słownym opisie czynności danego rodzaju, konstruowanie planów postępowania opisujących schematy czynności prowadzących do tworzenia przykładów definicji, zastosowania twierdzeń, opisywanie przedmiotu abstrakcyjnego za pomocą ciągu myślowych czynności jako wyniku czynności konkretnych i wyobrażonych
6. Ćwiczenia prowokujące konflikt myślowy, na takim poziomie, że dziecko chce i może go pokonać, kontrprzykłady, skrajne przypadki, zadania z błędami
7. Ćwiczenia w różnych formach przedstawiania,ilustrowania lub zapisu tego samego zadania, opisy tradycyjne, organigramy, drzewka

Nie jest jednak koniecznością, aby w danym opracowaniu metodycznym pojawiło się każde z wymienionych ćwiczeń.
Należy je stosować rozsądnie zależności od sytuacji oraz możliwości uczniów.
Do ćwiczeń, które uważam za ważne należą:

a. ćwiczenia „wprost”
b. ćwiczenia odwrotne do poprzednich
c. ćwiczenia tej samej czynności myślowej na różnych materiałach
d. ćwiczenia prowadzące do różnych ciągów czynności o tym samym rezultacie i różne sposoby rozwiązania
e. ćwiczenia w słownym opisie czynności danego rodzaju
f. ćwiczenia w różnych formach przedstawienia, ilustrowania lub zapisu tego samego zdania

PRZYKŁADY:

Ćwiczenie 1

Przed udaniem się na wycieczkę uczniowie otrzymują polecenie zbierania w parku tego, co świadczy o zbliżającej się jesieni. Wrażenia z wycieczki zostaną wykorzystane rozmaicie na różnych przedmiotach, zebrane materiały będą natomiast szczególnie przydatne na lekcji matematyki. Oto przykład fragmentu lekcji na temat: „Kształtowanie pojęcia zbioru”

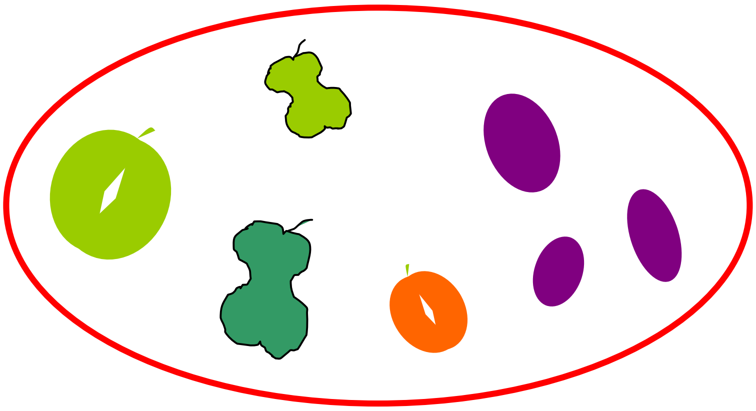
U_1 – Ja zbierałam liście kolorowe. Mam je w woreczku.
U_2 – Ja zbierałem żołędzie
U_3 – A w moim woreczku jest: kasztan, szyszka, głóg

N – Zbieraliście w parku rozmaite przedmioty. Oto wasze zbiory:
- zbiór liści Małgosi(pokazuje.............)
- zbiór żołędzi,
- zbiór do którego należy: kasztan, szyszka, głóg

Następuje dłuższa rozmowa na temat innych zbiorów, które dzieci przyniosły z wycieczki. Układają je na specjalnie przeznaczonym w klasie miejscu.

N – Kto z was ma w domu inne zbiory?
U_1 – Ja mam zbiór muszelek. Przywiozłem je z nad morza.
U_2– A mój brat ma zbiór znaczków. W takim klaserze.

N – Pokażę wam jeszcze inne zbiory(pokazuje pudełko kredek, paczkę zeszytów, pudełko klocków)
U_3 – To jest pudełko kredek – można powiedzieć – zbiór kredek w tym podełku
U_4 – To jest paczka zeszytów – zbiór zeszytów w tej paczce
U_5 – A to jest zbiór klocków
N – Pomyślcie, jakie są zbiory w naszej klasie? Popatrzcie wokoło, kto już znalazł, proszę wstać i powiedzieć odpowiednią nazwę.
U_6 – Może być zbiór ołówków, teczek, książek....
U_7 – Zbiór ławek, zbiór stolików.
U_8 – Zbiór okien.
U_9 – Może być dużo różnych zbiorów.
N – A jak nazwiemy ten zbiór?(uczniowie oglądają koszyczek, w którym znajdują się jabłka, gruszki, śliwki)
U_{10} – W koszyczku są jabłka, gruszki, śliwki.
U_{11} – To jest zbiór owoców.
N – Popatrzcie dobrze – teraz narysujemy ten zbiór owoców. Wewnątrz ramki będą owoce. Ale tylko te owoce, żadne inne.



Rysunek ucznia w zeszycie przedmiotowym

(Ćwiczenie śródlekcyjne – dzieci śpiewają piosenkę o darach jesieni)

N – Mamy tu zbiór owoców(pokazuje rysunek). Zbiory składają się z różnych owoców. Każdy z owoców na rysunku będziemy nazywać **elementem**. Nazwijcie wszystkie elementy tego zbioru.
U – Elementami tego zbioru są: gruszka, jabłko czerwone, jabłko zielone śliwka

Ćwiczenie 2

Zadanie: Zosia ma 5 zł. Jakie to mogą być monety?

W toku dyskusji i związanej z nią czynności konkretnych na żetonach w grupach 2 – osobowych uczniowie dochodzą do rozwiązania:

5 zł = 1 zł + 1 zł +1 zł + 1 zł + 1 zł(5 monet)
5 zł = 1 zł + 1 zł +1 zł + 2 zł (4 monety)

5 zł = 2 zł + 2 zł +1 zł (3 monety)
5 zł (1 moneta)

Ćwiczenie 3

Zadanie: Zosia ma następujące monety: 2 zł, 2 zł, 1 zł. Ile pieniędzy ma Zosia?
Uczniowie parami w ławkach posługują się monetami i poszukują rozwiązania. Mogą dochodzić do niego w różny sposób układając monety, np.:

2 zł + 2 zł + 1 zł = 5 zł
1 zł + 2 zł + 2 zł = 5 zł
2 zł + 1 zł + 2 zł = 5 zł

Ćwiczenie 4

Ćwiczenia na liczbach w kolorach
Układanie poszczególnych wariantów z poprzedniego ćwiczenia w formie dywanika.

Ćwiczenie 5

Zadanie: Zosia ma 2 monety po 5 zł, a Jacek 5 monet po 2 zł. Kto ma więcej pieniędzy?

5 zł + 5 zł = 10 zł 2 zł + 2 zł +2 zł + 2 zł + 2 zł = 10 zł

Jak to można zapisać inaczej?

$2 \cdot 5$ zł = 10 zł $5 \cdot 2$ zł = 10 zł

Co się zauważa?

$2 \cdot 5 = 10$ i $5 \cdot 2 = 10$

Czy można postawić „=" pomiędzy $2 \cdot 5$ i $5 \cdot 2$?

Wyciągnięcie wniosku, że pomiędzy $2 \cdot 5$ i $5 \cdot 2$ można postawić znak „="

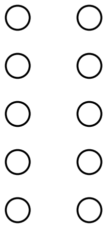
Ćwiczenie 6

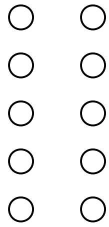
10 zł = $2 \cdot 5$ zł = $5 \cdot 2$ zł

Sformułowanie definicji mnożenia przemiennego.
Mnożenie jest przemienne. Można zmieniać kolejność czynników, a iloczyn nie ulega zmianie.

Ćwiczenie 7

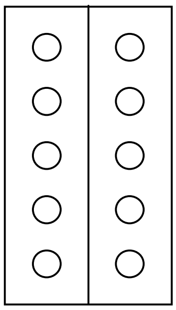
Zilustrowanie zapisu

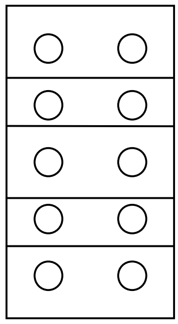




5 + 5 =10
2 · 5 =10

2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10
5 · 2 = 10





Literatura:
H. Siwek – „Nauczanie czynnościowe matematyki”(1998)
M. Cackowska – „Koncepcja nauczania czynnościowego i możliwości jej realizacji na szczeblu nauki początkowej”, „Życie Szkoły” nr 9/1985