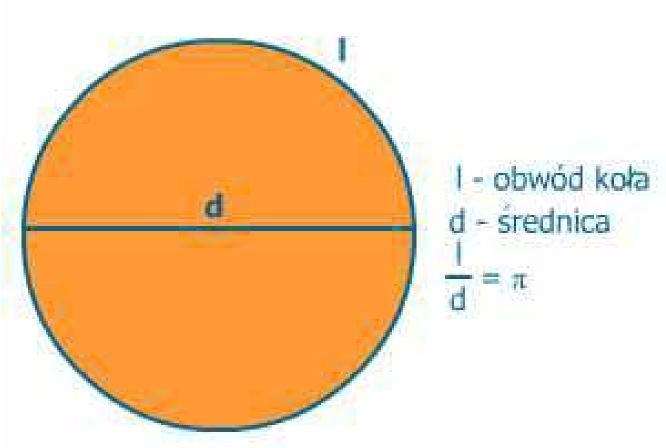
Liczba „pi”.

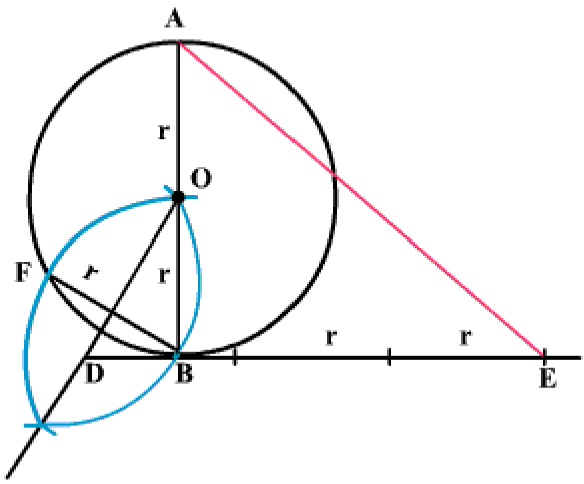
3 1 4 1 5 9
Kto z woli i myśli zapragnie
2 6 5 3 5
Pi spisać cyfry ten zdoła

Tę najsłynniejszą liczbę niewymierną spotykamy często. Występuje we wzorach na pola figur krzywoliniowych, brył obrotowych, we wzorach rachunku całkowego, w przybliżonym wzorze na silnie wielkich liczb (wzór Stirlinga) oraz rachunku prawdopodobieństwa. W technice wzory zawierające π występują w mechanice (zagadnienia związane z obrotem), radio- i teletechnice (wszędzie tam, gdzie występują drgania), w rachunkach wytrzymałościowych, statyce i akustyce. W fizyce π występuje jako współczynnik proporcjonalności i może być usunięta przez zmianę jednostek układu.



Oznaczenie stosunku obwodu koła do jego średnicy literą „pi” datuje się zaledwie od dwóch wieków. Symbol ten pochodzi od greckich słów **periferia** lub **perimetron**.
Pierwszy raz symbol ten został wprowadzony w 1706 roku przez angielskiego matematyka **Williama Jonesa** w jego dziela pod tytułem **„Synopsis Palmaroirum Matheseos”.** W powszechne użycie wszedł dopiero w połowie **XVIII wieku**, po wydaniu **„Analizy” Leonarda Eulera** (1707- 1783).

Chciałabym przedstawić dzieje badań właściwości tej słynnej liczby i ściśle związaną z nimi historię problemu **kwadratury koła**, to znaczy konstrukcji kwadratu o polu równym polu danego koła za pomocą cyrkla i linijki. Wobec tego, że koło o promieniu równym jednostce długości ma pole π, zagadnienie skonstruowania takiego kwadrau sprowadza się do skonstruowania odcinka o długości pierwiasteka kwadratowego z π jako boku poszukiwanego kwadratu. Odcinek ten konstruowalny jest wtedy i tylko wtedy, gdy odcinek o długości π jest konstruowalny. Metody potrzebne do udowodnienia niemożności tej konstrukcji zostały utworzone przez **Karola Hermite`a** (1822 - 1901), a dowód niekonstruowalności podał w 1882 roku matematyk niemiecki **F.Lindemann**. Udzielił tym samym negatywnej odpowiedzi na postawione przez starożytnych Greków pytanie o możliwości przeprowadzania kwadratury koła. Przybliżoną (i bardzo prostą) konsrukcję „wyprostowania okręgu” podał w 1685 roku Polak **Adam Kochański**.

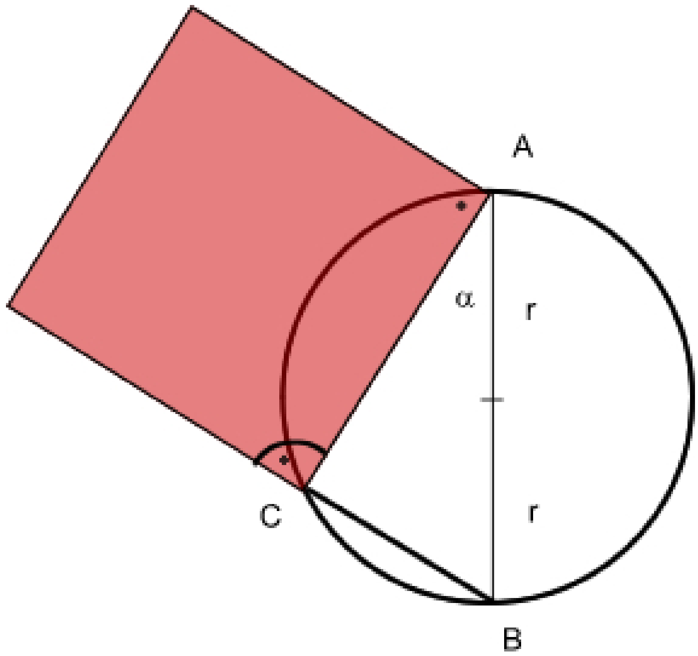


Rys.1. Konstrukcja Kochańskiego. DE = πr. Wszystkie łuki zataczane są tym samym promieniem.

Ta interesująca konstrukcja opiera się na przybliżeniu $\pi \approx 3{,}1415$ i prowadzi do skonstruowania odcinka o długości równej (z przybliżeniem około 0,0001 długości promienia) długości obwodu koła. Mając dany odcinek o długości 2π, można łatwo skonstruować kwadrat o polu π.

Pomysłowa „mechaniczna” kwadratura koła jest dziełem **Leonardo da Vinci**. Pole powierzchni bocznej walca o promieniu r i wysokości ½r jest równe polu powierzchni koła o promieniu r. Tocząc zaczerniony sadzą walec po papierze otrzymujemy prostokąt o polu równym polu danego koła. Skonstruowanie żądanego kwadratu jest teraz proste.

Bardzo prostą (i praktyczną) przybliżoną metodą szybkiego wykreślania boku kwadratu, którego pole jest równe polu danego koła podał w 1836 roku rosyjski inżynier **Bing**.



Rys.2. Pole kwadratu = pole koła, gdy $\alpha = 27^{o}35^{'}49^{''},6...$

Wróćmy do czasów starożytnych. Badacze piramidy Cheopsa do tej pory głowią się skąd jej budowniczowie mogli znać liczbę π z dokładnością do czterech liczb po przecinku. Mianowicie, iloraz otrzymany z podziału sumy dwóch boków podstawy przez wysokość piramidy wyraża się liczbą 3,1416, to znaczy liczbą „pi”. Przypadek? A może to nie Egipcjanie budowali piramidę Cheopsa?

Słynny **papirus Ahmesa**, najdawniejszy "podręcznik" matematyczny, powstały około 2000 lat przed naszą erą, podaje następujący sposób budowy kwadratu o polu równym polu koła: "Odrzuć od średnicy jej część dziewiątą i zbuduj kwadrat o boku równym pozostałej części, będzie on równoważny z kołem." Na podstawie tego przepisu "pi" Ahmesowe równało się **3,1605**. Budowniczowie piramidy byli zatem lepiej wtajemniczeni.

W ciągu prawie 4000 lat, które od tamtych czasów upłynęły, "pi" przechodziło wiele przemian. Od ustalonej przez **Archimedesa** wartości **22/7**, która dawała dwie cyfry dziesiętne po przecinku, dochodzi do rozwinięcia z 707 cyframi po przecinku, danego przez **Shanksa**. Zastosowana przez Archimedesa metoda jest jakby wprowadzeniem do rachunku całkowego.

Anglik **D.F.Ferguson** sprawdził ostatnie obliczenie Shanksa i w roku 1944 ogłosił, że jego wyniki różnią się od rozwinięcia Shanksa zaczynając od 528 cyfry po przecinku. Niektóre wyrażenia dla liczby "pi" są szczególnie ciekawe, pokażemy więc kilka:

Ptolemeusz (II wiek) podaje taką wartość:

$$\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600} = 3{,}1416$$

Bhaskara, słynny matematyk hinduski IX wiek:

$$\pi = \frac{754}{240} = 3{,}1416$$

Al Chwarizmi, matematyk arabski IX wiek (rok 830):

$$\pi = \sqrt{10}$$

Francuski matematyk **Viete** (rok 1579) skonstruował skomplikowane wyrażenie, pozwalające mu podać wartość liczby "pi" z 11 cyframi po przecinku.

Modyfikując metodę Archimedesa, matematyk holenderski **Ludolf van Ceulen** (1540-1610) obliczył w 1610 roku π z dokładnością do 35 znaków po przecinku. Na jego cześć liczbę π nazwano ***ludolfiną.*** Van Ceulen wpisywał w koło wielokąty o 2^n bokach, n = 2,3,... Bok takiego wielokąta foremnego ma długość:

$$S_2n = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}}$$

(n - 1 pierwiastków kwadratowych)

Opisaną dokładność otrzymał van Ceulen dla wielokątów o bokach 2^{62} bokach.

Oto inwokacja **Witolda Rybczyńskiego "Do Mnemozyny, bogini pamięci"**, ogłoszona w Problemach (rok 1949, nr 8). Jeśli policzymy ilość liter w poszczególnych wyrazach, otrzymamy kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby "pi". Jedna z cyfr jest odtworzona błędnie. Błąd występuje w słowie "zadania", które składa się z 7 liter, a w tym miejscu powinna być cyfra 8. W miejscu myślnika należy wpisać zero.

"Daj, o pani, o boska Mnemozyno,
pi liczbę, którą też zowią ponętnie
ludolfiną, pamięci przekazać tak,
by jej dowolnie oraz szybko do
pomocy użyć, gdy się zadania nie
da inaczej, rozwiązać, pauza - to
zastąpić liczbami."

W 1656 roku angielski matematyk **John Wallis** podał interesujący wzór:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2*2*4*4*6*6*8*8...}{3*3*5*5*7*7*9*9...}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!^2(2n+1)}$$

Euler rozwinął **π** na ułamek łańcuchowy.

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\ldots}}}}$$

Jednym z najpiękniejszym osiągnięć matematycznych XVII wieku było odkrycie tzw. **naprzemiennego szeregu Leibniza** (1673r.).

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots$$

Ten piękny i zaskakujący wzór nie ma jednak praktycznego znaczenia ze względu na niesłychaną powolność zbliżania się sum częściowych po prawej stronie do granicy ¼**π**.

Jednym z najwygodniejszych do obliczeń jest wzór Machina (1706r.).

Najważniejszą w historii liczby "pi", prawdziwie przełomową datą był **rok 1882**, w którym matematyk niemiecki **F.Lindemann** wykazał ostatecznie przestępny charakter tego symbolu: *liczba "pi" nie może być pierwiastkiem równania algebraicznego o współczynnikach całkowitych*. Nie jest więc ona konstruowalną, gdyż, jak wykazano w połowie XIX wieku, żadna liczba przestępna nie posiada tej własności.

W latach 1945-48 **A. Smith i J. Wrench** obliczyli na arytmometrze 808 miejsc rozwinięcia π (myląc się jednak od 723 miejsca).Pierwsze obliczenia π za pomocą maszyn matematycznych są dziełem **G. Reitwiesnera**, który 1949 roku obliczył na maszynie **ENIAC** (pierwsza elektronowa maszyna matematyczna) **2037** miejsc.

Obecnie przy pomocy elektronowych maszyn do liczenia, obliczono już 1000 000 cyfr po przecinku.

Matematycy	Rok	Typ maszyny	Ilość cyfr rozwinięcia
G. Reitwiesner	1949	ENIAC	2037
S. C. Nicholson	1954-55	NORC	3089
J. Jeenal	1958	IBM 704	10 000
F. Genuys	1959	IBM 704	16 167
Daniel Shanks i J. Wrench	1961	IBM 7090	100 265
J. Gilloud i A. Fillatore	1966	STRETCH	250 000
J. Gilloud i M. Dichamp	1967	CDC 6600	500 000
J. Gilloud i M. Bouyer	1974	?	1 000 000

Liczba π weszła do języka potocznego („pi razy oko”), występuje w wierszach i przypowieściach. W dawnych latach modne było układanie wierszyków i powiedzeń, w których liczby liter w kolejnych słowach są równe kolejnym cyfrom rozwiniecia π. A oto wiersz Kazimierza Cwojdzińskiego(pisownia dawna):

Kuć i orać
W dzień zawzięcie,
Bo plonów
Niema bez trudu
Złocisty szczęścia okręcie
Kołyszesz...
Kuć.
My nie czekamy cudu.
Robota
To potęga ludu.

Przypomnijmy jeszcze jeden wiersz o liczbie π, ułożony podczas zmagań sportowych na Mundialu w Argentynie, a wydrukowany w popularnym miesięczniku „Delta” (nr.6/1978).

Już i Lato i Deyna
strzelili do bramki obcej
dwa karne
Lubański dostrzegł mistrza Szarmacha
gdy on tak wypuścił cios szacha
że zdobyć musi cel gry
krzyknął gol na Mundial Argentyna

/Mundial Argentyna/

I jeszcze kilka wersów o ludolfinii:

Nie, o Gott, o guter, verliehst Du meinem Hirne die Kraft
machtige Zahlreihn dauernd verkettet bis in die spaetere Zeit
getreu zu merken. Drum hab. ich Ludolph mir zu Lettern umgepragt.

Co oznacza(w przekładzie Witolda Rabczyńskiego):
Nigdy, o dobry Boże, nie użyczysz mi mocy spamiętania po
wsze czasy potężnego, ze sobą trwale sprężonego szeregu
cyfr. Dlatego przyswoiłem sobie ludolfinę w słowach.

/Clemens Brentan

A oto jeden z najpiękniejszych współczesnych wierszy opiewających liczbę π.

Liczba Pi

Podziwu godna liczba Pi
trzy koma jeden cztery jeden.
Wszystkie jej dalsze cyfry też są początkowe,
pięć dziewięć dwa ponieważ nigdy się nie kończy.
Nie pozwala się objąć **sześć pięć trzy pięć** spojrzeniem
osiem dziewięć obliczeniem
siedem dziewięć wyobraźnią,
a nawet **trzy dwa trzy osiem** żartem, czyli porównaniem
cztery sześć do czegokolwiek
dwa sześć cztery trzy na świecie.
Najdłuższy ziemski wąż po kilkunastu metrach się urywa
podobnie, choć trochę później, czynią węże bajeczne.
Korowód cyfr składających się na liczbę Pi
nie zatrzymuje się na brzegu kartki,
potrafi ciągnąć się po stole, przez powietrze,
przez mur, liść, gniazdo ptasie, chmury, prosto w niebo,
przez całą nieba wzdętość i bezdenność.
O, jak krótki, wprost mysi, jest warkocz komety!
Jak wątły promień gwiazdy, że zakrzywia się w lada przestrzeni!
A tu **dwa trzy piętnaście trzysta dziewiętnaście**
mój numer telefonu twój numer koszuli
rok **tysiąc dziewięćset siedemdziesiąty trzeci szóste** piętro
ilość mieszkańców **sześćdziesiąt pięć groszy**
obwód w biodrach **dwa** palce szarada i szyfr,
w którym słowiczku mój a leć, a piej
oraz uprasza się zachować spokój,
a także ziemia i niebo przeminą,
ale nie liczba Pi, co to to nie,
ona wciąż swoje niezłe jeszcze **pięć**,
nie byle jakie **osiem**,
nieostatnie **siedem**,
przynaglając, ach, przynaglając gnuśną wieczność
do trwania.

/Wisława Szymborska/

Opracowała mgr **Urszula Siczek** na podstawie

„Opowieści matematycznych” Michała Szurek.