

# USTNY EGZAMIN DOJRZAŁOŚCI Z MATEMATYKI

Opracowała Małgorzata Gołdon

Ustny egzamin dojrzałości składa się z trzech pytań. Każde z pytań jest innego typu. Pytanie I dotyczy sformułowania i dowodu twierdzenia lub wyprowadzenia wzoru, pytanie II sprawdza znajomość pojęć, definicji i twierdzeń występujących w programie nauczania a także umiejętność szkicowania wykresów funkcji, pytanie III dotyczy praktycznego stosowania twierdzeń, własności lub definicji w zadaniach.

Poniżej przedstawiam przykłady pytań każdego typu, które można wykorzystać przy budowie zestawu pytań na ustny egzamin dojrzałości z matematyki w liceach zawodowych z 10 godz. cyklem kształcenia.

## I

### SFORMUŁOWANIE I DOWÓD TWIERDZENIA LUB WYPROWADZENIE WZORU

1. Udowodnij, że liczba  $\sqrt{2}$  jest liczbą niewymierną.
2. Podaj określenie monotoniczności funkcji i udowodnij, że dla  $a < 0$  funkcja  $y = ax + b$  jest malejąca w zbiorze  $R$ .
3. Wyprowadź wzory na współrzędne wierzchołka paraboli  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$
4. Wyprowadź wzory na sumę i iloczyn pierwiastków trójmianu kwadratowego.
5. Uzasadnij na podstawie definicji, że dla  $a < 0$  funkcja  $y = ax^2$  jest rosnąca w zbiorze  $R$ .
6. Sformułuj i udowodnij twierdzenie Bezouta
7. Wypowiedz i udowodnij twierdzenie o pierwiastkach całkowitych wielomianu.
8. Podaj własności logarytmów - udowodnij wybraną własność.
9. Podaj twierdzenia dotyczące działań na potęgach – udowodnij jedno z nich.
10. Wyprowadź wzór na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego.
11. Podaj i uzasadnij wzór na sumę szeregu geometrycznego zbieżnego.
12. Wykaż, że w ciągu geometrycznym o wyrazach dodatnich, każdy wyraz jest średnią geometryczną wyrazów sąsiednich.
13. Wyprowadź wzór na równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty o danych współrzędnych  $A(x_1, y_1)$  i  $B(x_2, y_2)$
14. Podaj własności prawdopodobieństwa i udowodnij jedną z nich.
15. Udowodnij, że jeżeli zdarzenia  $A$  i  $B$  są niezależne to zdarzenia  $A'$  i  $B'$  też są niezależne.
16. Udowodnij, że suma prawdopodobieństw zdarzeń przeciwnych jest równa 1.
17. Sformułuj i udowodnij twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.
18. Udowodnij twierdzenie, że suma kątów wewnętrznych trójkąta jest równa kątowi półpełnemu.
19. Podaj twierdzenia o czworokątach opisowych i wpisanym w okrąg. Udowodnij jedno z nich.
20. Sformułuj i udowodnij twierdzenie o okręgu opisanym na trójkącie.
21. Wyprowadź wzory na wysokość, promień okręgu wpisanego i promień okręgu opisanego dla trójkąta równobocznego o boku  $a$ .
22. Uzasadnij, że dwa kąty wpisane oparte na tym samym łuku okręgu mają równe miary.
23. Udowodnij, że kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku.

24. Podaj określenie i własności izometrii. Udowodnij jedną własność.
25. Podaj i udowodnij podstawowe tożsamości trygonometryczne.
26. Podaj i uzasadnij wzory redukcyjne funkcji trygonometrycznych dla kątów  $90^\circ + \alpha$ ,  $90^\circ - \alpha$ ,  $180^\circ + \alpha$ ,  $180^\circ - \alpha$
27. Sformułuj i udowodnij twierdzenie cosinusów. Podaj zastosowanie twierdzenia cosinusów
28. Podaj i udowodnij twierdzenie sinusów. Podaj zastosowanie twierdzenia sinusów.
29. Sformułuj twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa. Udowodnij twierdzenie Pitagorasa.
30. Podaj i udowodnij twierdzenie Talesa.

## II

### ZNAJOMOŚĆ POJĘĆ, DEFINICJI, TWIERDZEŃ WYSTĘPUJĄCYCH W PROGRAMIE NAUCZANIA.

1. Podaj definicje dziedziny funkcji. Określ dziedzinę funkcji
 
$$y = \sqrt{9 - x^2} + \frac{1}{x - 3}$$
2. Co to znaczy odczytać własności funkcji z wykresu? Naszkicuj wykresy  $f(x) = -|x| + 2$ ,  $f(x) = (x-1)^3$ ,  $f(x) = \sqrt{x} - 4$  oraz odczytaj własności funkcji z wykresu.
3. Podaj definicje i omów własności wartości bezwzględnej z liczby
4. Podaj zależności pomiędzy podzbiarami zbioru liczb rzeczywistych. Omów wykonywalność podstawowych działań w tych zbiorach.
5. Podaj postać kanoniczną, ogólną i iloczynową trójmianu. Jak sprowadzić funkcję z postaci ogólnej do kanonicznej?.
6. Podaj schematyczne wykresy trójmianu kwadratowego w zależności od współczynnika  $a$  i wyróżnika  $\Delta$
7. Wyjaśnij związek wykresu funkcji  $y = ax^2 + bx + c$  z wykresem  $y = ax^2 + bx + c$
8. Podaj wzorów Vieta i omów ich zastosowanie. Mając dane równanie  $x^2 - 6x + 5 = 0$  oblicz wartość wyrażenia  $x_1^2 + x_2^2$
9. Jakie przekształcenia geometryczne należy zastosować, aby z wykresu funkcji  $y = f(x)$  otrzymać.
  - a)  $y = |f(x)|$ , b)  $y = -f(x)$ , c)  $y = f(-x)$ , d)  $y = f(x+p) + q$
10. Omów własności funkcji trygonometrycznych i naszkicuj ich wykresy
11. Co to jest miara łukowa? Jaki jest związek między miarą łukową a stopniową - wyprowadź zależności.
12. Podaj definicje ciągu, sposoby określania i przykłady ciągów.
13. Podaj określenie i omów monotoniczność ciągów liczbowych.

14. Ciąg arytmetyczny – podaj definicję, własności i przykłady.
15. Ciąg geometryczny - podaj definicję, własności i przykłady.
16. Omów własności funkcji potęgowej  
 $y=x^k$       gdy
- a)  $k \in \mathbb{N}$ ,    b)  $k \in \mathbb{C} \wedge k < 0$ ,    c)  $k = 1/n$     gdzie  $n \in \mathbb{C} - \{0\}$
17. Podaj określenie potęgi o wykładniku wymiernym oraz własności działań na potęgach.
18. Funkcja logarytmiczna –podaj definicję, własności i wykres.
19. Funkcja wykładnicza- podaj definicję, własności i wykres.
20. Równanie prostej na płaszczyźnie ( postać ogólna, postać kierunkowa).  
Warunek równoległości i prostopadłości prostych.
21. Napisz wzór na odległość punktu  $A(a, b)$  od prostej  $Ax + By + C = 0$ .  
Podaj zastosowanie tego wzoru.
22. Jak za pomocą współrzędnych punktów wyznacza się:
  - współrzędne wektora,
  - długość odcinka,
  - środek odcinka
23. Podaj interpretację geometryczną rozwiązania układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi.
24. Podaj określenie i postać analityczną :
  - przesunięcia o wektor
  - symetrii środkowej
  - jednokładności.
25. Omów przekroje płaskie walca, stożka i kuli płaszczyznami równoległymi i prostopadłymi do osi symetrii.
26. Jakie może być wzajemne położenie dwóch okręgów. Podaj i omów wszystkie przypadki.
27. Podaj definicję poznanych brył obrotowych oraz wzory na pola powierzchni i objętość tych figur.
28. Omów schemat Bernolli'ego -podstawowe definicje i wzory.
29. Podaj określenie i przykłady prawdopodobieństwa warunkowego.
30. Podaj określenie i przykłady :
  - permutacji
  - kombinacji
  - wariacji z powtórzeniami i bez powtórzeń.

### III

#### **PROSTE RACHUNKOWE ZADANIA, W KTÓRYCH MATURZYSTA POWINIEN WYKAZAĆ SIĘ UMIEJĘTNOŚCIĄ STOSOWANIA TWIERDZEŃ, WŁASNOŚCI LUB DEFINICJI.**

1. Podaj ilustracje zbiorów  $A \cap B$ ,  $A-B$  na płaszczyźnie pola  
 $A = \{(x,y): x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y > x-1 \}$   
 $B = \{(x,y): x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y > 1+x^2 \}$

2. Cenę towaru najpierw obniżono o 20% a następnie podwyższono o 20%. Jak ostatecznie zmieniła się cena? Jak zmieni się cena towaru gdy ją najpierw podwyższono o 20% a następnie obniżono o 20%?
3. Oblicz odległość wierzchołka paraboli  $y = -x^2 + 2x + 1$  od początku układu współrzędnych oraz od prostej  $2x + y - 6 = 0$ .
4. Wyznacz  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$  jeżeli  $A = \langle -2; 1 \rangle$  a  $B = \langle -1; 3 \rangle$ .
5. Dla jakich wartości parametru  $k$  równanie

$$x^2 + (k-3)x + k - 5 = 0$$

nie ma pierwiastków ?.

6. Dla jakich wartości  $k$  suma kwadratów pierwiastków równania:

$$x^2 + (k-3)x + k - 5 = 0$$

jest równa 20.

7. Trójmian kwadratowy  $y = 3x^2 + bx + c$  ma miejsca zerowe  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 1$ . Wyznacz  $b$  i  $c$ .

8. Zbadaj dla jakich wartości parametru  $m$  pierwiastki równania  $3x^2 + mx + 1 = 0$  są sinusem i cosinusem tego samego kąta.

9. Rozwiąż równania :

a)

$$2^x * \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} = 2$$

b)

$$\log_2(x-2) = 1$$

10. Rozwiąż nierówności

$$x^3 > 1/8 \quad , \quad (1/4)^x < 64 \quad , \quad \log_2(2x+2) < -2$$

Podaj z jakich własności korzystałeś?

11. Naszkicuj wykresy podanych funkcji:

$$y = 1 + \log_2 x$$

$$y = \frac{1}{2}^{|x|}$$

$$y = 3^{x+1}$$

12. Rozwiąż równanie  $1+2+7+ \dots + x = 117$  gdzie lewa strona jest sumą u pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego.

13. Dla jakich wartości  $x$  ciąg liczb  $x+8$ ,  $x-4$ ,  $x-8$  jest ciągiem geometrycznym

14. Przedstaw w postaci ułamka zwykłego liczbę  $0,1(3)$

15. Długości boków trójkąta prostokątnego, którego pole wynosi  $300\text{cm}^2$ . tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz obwód trójkąta

16. Rozwiąż graficznie układ nierówności:

$$x > 0 \wedge y < \sin x \wedge y > x - 1.$$

17. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha$  jeżeli  $\text{tg } \alpha = -0,75$  i  $\alpha \in (270^\circ; 360^\circ)$

18. Styczna do wykresu  $f(x) = x^2 - 2x + 5$  jest prostopadła do prostej o równaniu  $y + 0,5x = 0$ . Znaleźć współrzędne punktu styczności.

19. Napisz równanie wysokości, środkowej i symetralnej w trójkącie o wierzchołkach ABC gdzie  $A(4, -2)$ ,  $B(-2, -3)$ ,  $C(6, 4)$

20. Zdarzenia A i B są niezależne  $P(A) = 1/3$  i  $P(A \cap B) = 1/5$ . Oblicz  $P(A \cup B)$ .

21. Rzucamy sześć razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo, że orzeł wypadnie:

- dokładnie 4 razy.

- co najmniej 1 raz

21. Wśród 20 żarówek 4 są wadliwe. Wybrano losowo trzy żarówki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszystkie wybrane żarówki są wadliwe?

23. Oblicz długość wysokości czworoboku foremnego o krawędzi długości a.

24. Oblicz pole trójkąta, gdy dany jest promień okręgu opisanego na trójkącie  $R = 10\text{ cm}$  i dwa kąty o miarach.

25. Boki równoległoboku mają długości 5 cm i 8 cm, kąt zawarty między nimi wynosi  $30^\circ$ . Oblicz długości przekątnych równoległoboku i jego pole.

26. Napisz równanie okręgu do którego należą punkty  $A(-5, 0)$ ,  $B(7, 0)$ ,  $C(0, 1)$ . Zapisz równanie w postaci kanonicznej i ogólnej.

27.. Znajdź równanie paraboli  $y = x^2 - 2x$  w:

- przesunięciu o wektor  $\vec{u} = [2, -2]$
- symetrii względem początku układu współrzędnych
- jednokładności o środku w punkcie  $P(1, 1)$  i skali  $k = -2$

28. Dla jakich wartości parametru  $m$  proste o równaniach  $y = (m-1)x + 1$  i  $y = -m/3x + 2$

- równoległe
- prostopadłe

29. Rozwiąż równanie i nierówność

a)  $x^3 - 5x^2 + 4 = 0$

b)  $(x^2 - 4)(x + 2) \geq 0$

30. Dla jakich wartości parametru  $m$  wielomian

$$W(x) = x^{17} - mx^3 + (m-2)x^2 - 2x + m^2 - 2 \text{ jest podzielny przez dwumian } x+1?$$