Danuta Bryk

Jak w prosty sposób uczyć kombinatoryki

W dotychczasowej praktyce nauczania, elementy kombinatoryki wprowadzane były bądź w dziale „ciągi” i ograniczały się do permutacji oraz kombinacji, bądź łącznie z wariacjami w dziale „rachunek prawdopodobieństwa”.

Autorzy nowych programów zdecydowanie opowiedzieli się za umieszczeniem tych treści w dziale „rachunek prawdopodobieństwa”, z czym zgadzam się w zupełności. Wyraźnie podkreślają, że uczeń powinien umieć rozpoznawać permutacje, kombinacje oraz wariacje z powtórzeniami i bez powtórzeń a także rozwiązywać proste zadania kombinatoryczne.

Trudno nie zgodzić się z faktem, że rozróżnianie tych pojęć oraz ich trafne stosowanie w zadaniach stanowi dla większości uczniów spory problem.

Od wielu lat wprowadzam te pojęcia w oparciu o ich trzy podstawowe własności, sporządzając odpowiednią tabelę.

	kolejność występowania elementów	**ilość wykorzystanych elementów**	**powtarzanie się elementów**	**wzór**
kombinacja	nie ważna	nie muszą być wszystkie wykorzystane	nie mogą się powtarzać	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
permutacja	ważna	wszystkie wykorzystane	nie mogą się powtarzać	$P_n = n!$
wariacja bez powtórzeń	ważna	nie muszą być wszystkie wykorzystane	nie mogą się powtarzać	$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
wariacja z powtórzeniami	ważna	nie muszą być wszystkie wykorzystane	mogą się powtarzać	$\overline{V}_n^k = n^k$

Odpowiedź na trzy zasadnicze pytania:

1. Czy kolejność występowania elementów jest ważna?
2. Czy wszystkie elementy są wykorzystane?
3. Czy elementy mogą się powtarzać?

wystarczy, aby odszukać w tabeli odpowiedni przypadek i skorzystać z właściwego wzoru.

Taką tabelę można sporządzić po wprowadzeniu wszystkich pojęć, bądź systematycznie uzupełniać ją przy wprowadzaniu kolejnych. Bardzo chętnie korzystają z niej uczniowie również przy okazji rozwiązywania zadań z rachunku prawdopodobieństwa. Co najważniejsze rzadko popełniają błędy związane z wyznaczaniem mocy zbioru zdarzeń elementarnych. Zdarzało mi się również powiększać tabele o kombinacje i permutacje z powtórzeniami.

Jak korzystać z tabeli pokażę na przykładzie kilku zadań:

Zad.1. Ile można utworzyć liczb pięciocyfrowych dysponując cyframi 4,5,7?

- kolejność występowania cyfr w liczbie jest ważna.
- nie wszystkie cyfry muszą być wykorzystane (może być liczba postaci 44444).
- cyfry muszą się powtarzać (różnych jest tylko trzy).

Te trzy własności posiada wariacja z powtórzeniami. Aby odpowiedzieć na pytanie postawione w zadaniu wystarczy zastosować wzór: $\overline{V}_n^k = n^k$ gdzie k=5, n=3.

Zatem jest $\overline{V}_3^5 = 3^5 = 243$ takich liczb.

Zad.2. Ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych o nie powtarzających się cyfrach?

- kolejność występowania cyfr w liczbie jest ważna.
- nie wszystkie cyfry mogą być wykorzystane.
- nie mogą się powtarzać.

Te własności posiada wariacja bez powtórzeń.

Zatem $V_{10}^{4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 5040$.

W tej liczbie wariacji znajdują się przypadki z zerem na początku. Stanowią one 1/10 całości, czyli 504 przypadki.

Ostatecznie jest 5040-504=4536 takich liczb.

Zad.3. Ile nastąpi powitań, gdy spotka się jednocześnie sześciu znajomych?

- kolejność powitań nie jest ważna (nie ważne czy wita się znajomy A ze znajomym B, czy odwrotnie).
- nie wszystkie elementy wykorzystane (wita się dwóch znajomych).
- nie mogą się powtarzać (nikt nie wita się sam ze sobą).

Jest to kombinacja dwóch różnych elementów wybranych spośród sześciu różnych elementów. Wszystkich powitań jest $C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{5\cdot 6}{2} = 15$.

Zad.4. Ile jest różnych ustawień na starcie siedmiu kolarzy do jazdy indywidualnej na czas?

- kolejność występowania ważna.
- wszystkie elementy są wykorzystane.
- nie mogą się powtarzać.

Możliwych jest zatem tyle ustawień ile jest różnych permutacji zbioru siedmioelementowego $P_7 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 5040$.

.

Przed przystąpieniem do rozwiązywania złożonych zadań kombinatorycznych należy zapoznać uczniów z twierdzeniem o mnożeniu. Dla dwóch grup elementów ma ono postać: ”Z m elementów postaci $a_1, a_2, a_3, ..., a_m$ i n elementów postaci $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ można utworzyć $m\cdot n$ różnych par postaci (a_j, b_k) gdzie $1 \le j \le m$, i $1 \le k \le n$”

Analogicznie twierdzenie to można uogólnić na trzy, cztery lub k grup elementów.

Niektóre z zadań rozwiązuje się bezpośrednio w oparciu o to twierdzenie np.

Zad.5. Na konkursie tańca spotyka się 6 panów i 8 pań. Każdy pan z każdą panią ma zatańczyć 2 różne tańce. Ile razy orkiestra musi zagrać, jeżeli jednocześnie tańczą 4 pary?

Są trzy grupy elementów:8 pań, 6 panów i 2 tańce.

Wszystkich różnych zestawień jest $8\cdot 6\cdot 2 = 96$.

Wobec tego orkiestra musi zagrać 96/4=24 razy.

Zad.6. Numer eksponatu w muzeum składa się z dwóch różnych liter i pięciu różnych cyfr (dwie pierwsze to litery, pięć następnych to cyfry). Ile różnych numerów można zestawić przyjmując 21 liter w alfabecie?

- kolejność występowania elementów ważna.
- nie wszystkie elementy wykorzystane.
- nie mogą się powtarzać.

Korzystając ze wzoru na liczbę wariacji bez powtórzeń oraz z twierdzenia o mnożeniu otrzymujemy $V_{21}^2 \cdot V_{10}^5 = \frac{21!}{19!}\cdot\frac{10!}{5!} = 20\cdot 21\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 12700800$ różnych numerów.

Przykłady zadań z kombinatoryki można dobierać w zależności od zakresu kształcenia i zdolności uczniów danej klasy. Mogą to być zadania z życia codziennego jak np. wystawianie delegacji spośród uczniów danej klasy, ustawienie osób przy stole, wybór liczb w toto-lotku itp.