# Wariancje

Do drugiej grupy parametrów dających wyobrażenie o tym jak bardzo poszczególne wartości zmiennej losowej odchylają się od tej przeciętnej wielkości zaliczamy wariancję, odchylenie standardowe i odchylenie przeciętne.

Wariancja zmiennej losowej.

Niech zmienne losowe X i Y mają rozkłady:

$$\{(-100,\frac{1}{2}),(100,\frac{1}{2})\}$$

$$\{(2,\frac{1}{3}),(-1,\frac{2}{3})\}$$

Ich wartości oczekiwane wynoszą:

$$EX=(-100)\cdot\frac{1}{2}+100\cdot\frac{1}{2}=0$$

$$EY=2\cdot\frac{1}{3}+(-1)\cdot\frac{2}{3}=0$$

$$EX=EY=0$$

Zmienna losowa X przybiera dwie wartości różniące się o 200, a Y – różniące się o 3. Powiemy, że zmienna X ma duży rozrzut wartości, a zmienna Y – mały. A oto nowy parametr charakteryzujący rozrzut wartości zmiennej losowej (rozproszenie wartości zmiennej losowej).

Wariancją zmiennej losowej X nazywamy liczbę oznaczoną symbolem $D^2X$, określoną wzorem:

$$D^2X=E(X-EX)^2$$

Niech zmienna losowa X ma rozkład $\{(x_i,p_i),i=1,...,n\}$.

Oznaczmy EX=m, wówczas zmienna losowa $Y=(X-EX)^2$ przybiera wartości $(x_i-m)^2$ odpowiednio z prawdopodobieństwem $p_i$. Stąd na mocy wzoru:

$$EX=X(\omega_1)\cdot u_1+...+X(\omega_n)\cdot u_n$$

$$\Omega=\{\omega_1,...,\omega_n\}$$

$$u_j=P(\{\omega_j\})$$

otrzymujemy: $EY=(x_1-m)^2p_1+...+(x_n-m)^2p_n$

a więc: $D^2X=(x_1-m)^2p_1+...+(x_n-m)^2p_n$

Wariancja $D^2X$ zmiennej losowej X jest mała, to każdy składnik $(x_i - m)^2 p_i$, $i = 1,...,n$ jest też mały. Zatem, jeżeli $(x-m)^2$ jest duże, to $p_i$ musi być małe. Suma tych $p_i$, dla których $(x-m)^2$ jest duże – też musi być mała. A więc, jeżeli wariancja zmiennej losowej X jest mała, to prawdopodobieństwo zdarzenia, że X przyjmuje wartość dużo różniącą się od stałej m, jest małe. Dlatego też wariancję nazywamy miarą rozrzutu zmiennej losowej X.

Do obliczenia wariancji często stosujemy następujący wzór:

$$D^2X = EX^2 - (EX)^2$$

Dowód:

$$\begin{aligned} EX &= m \\ D^2X &= E(X - EX)^2 = E(X-m)^2 = E(X^2 - 2mX + m^2) = \\ &= EX^2 - 2mEX = m^2E(0) = EX^2 - 2m^2 + m^2 = \\ &= EX^2 - m^2 = EX^2 - (EX)^2 \qquad \text{c.b.d.o.} \end{aligned}$$

Zadanie 1.

Rzucamy kostką. Zmienna losowa X jest liczbą oczek jakie wypadły. Obliczyć wariancję.

X przybiera wartości: 1,2,3,4,5,6; każdą z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$

Wartość oczekiwana

$$EX = \frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n)$$

$$EX = \frac{1}{6}(1 + ... + 6) = 3{,}5$$

Zmienna losowa $X^2$ ma rozkład $\{(i^2, \frac{1}{6}), i = 1,...,6\}$ więc na mocy wzoru

$$D^2X = EX^2 - (EX)^2$$

mamy: $D^2X = \frac{1}{6} \cdot (1^2 + ... + 6^2) - (3{,}5)^2 \cong 2{,}92$

Twierdzenia

Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie $\{(x_i, p_i), i = 1,...,n\}$ wówczas

a) $D^2(cX) = c^2 D^2 X$

Wariancja iloczynu stałej c przez zmienną losową X równa się iloczynowi kwadratu tej stałej przez wariancję zmiennej losowej X.

b) $D^2 X = 0$

Wariancja stałej równa się zero.

c) Wariancja sumy dwóch niezależnych zmiennych losowych równa się sumie wariancji tych zmiennych.

$$D^2(X+Y) = D^2 X + D^2 Y$$

d) Wariancja sumy n niezależnych zmiennych losowych $x_1,...,x_n$ równa się sumie wariancji tych zmiennych:

$$D^2(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \sum_{i=1}^{n} D^2(x_i)$$

e) Wariancja różnicy dwóch niezależnych zmiennych losowych równa się sumie wariancji tych zmiennych.

$$D^2(X-Y) = D^2(X) + D^2(Y)$$

Obok wariancji jako miary rozproszenia używa się także pierwiastka z wariancji. Pierwiastek kwadratowy z wariancji nazywa się odchyleniem standardowym. Odchylenie standardowe oznacza się na ogół małą literą grecką $\sigma$.

$$\sigma_x = \sqrt{D^2 X}$$

Niech X będzie zmienną losową, a EX wartością przeciętną (oczekiwaną) tej zmiennej. Różnicę

$$Z = X - EX$$

nazywać będziemy odchyleniem wartości zmiennej losowej od wartości przeciętnej (oczekiwanej) tej zmiennej.

Odchyleniem przeciętnym nazywamy wartość przeciętną bezwzględnego odchylenia wartości zmiennej losowej od wartości przeciętnej EX.

Oznaczając odchylenie przeciętne literą d, otrzymamy:

$$d = \sum_{-\infty < x_i < \infty} |x_i - EX| p_i$$

gdy zmienna losowa jest skokowa, lub:

$$d = \int_{-\infty}^{\infty} |X - EX| f(x) dx$$

gdy zmienna losowa jest ciągła.

Odchylenie przeciętne podobnie jak wariancja lub odchylenie standardowe jest miarą rozproszenia, a tym samym należy do parametrów opisowych drugiego rodzaju.

Literatura:

Zdzisław Hellwig – Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej
Adam Płocki – Rachunek prawdopodobieństwa dla nauczycieli
Wiesław Szlenk – Rachunek prawdopodobieństwa

Opracowała:
Alina Wierus