Problem delijski

Około 400 lat p.n.e. wybuchła w Grecji epidemia dżumy, która trwała bardzo długo i pochłaniała olbrzymią ilość ofiar mimo nieustających modłów i dorywczo stosowanej pomocy lekarskiej. Zrozpaczona ludność postanowiła wówczas zwrócić się do słynnej wyroczni boga Apollina w Delos z zapytaniem co należy uczynić, aby przebłagać bogów. Odpowiedź przekazana przez kapłankę brzmiała, że należy przebudować ołtarz boga znajdujący się w świątyni delijskiej, mający kształt sześcianu, w ten sposób, aby jego objętość powiększyła się dwukrotnie. Zadanie to nie było trudne i dlatego też szybko uczyniono zadość życzeniu boga, zmieniając przy tym kształt geometryczny ołtarza.

Dżuma jednak szalała dalej, a na dalsze zapytanie, dlaczego gniew boga nie ustąpił, wyrocznia odpowiedziała, że należy nie tylko podwoić objętość ołtarza, ale również zachować jego dawną postać sześcienną.

Przystąpiono do realizacji tego, zdawałoby się na pierwszy rzut oka, prostego żądania. Natrafiono jednak na nieprzewidziane trudności. Wreszcie postanowiono zwrócić się po radę do najbardziej autorytatywnego uczonego w owym czasie – Platona. Lecz mimo wysiłków zarówno jego, jak i jego uczniów, nie znaleziono konstrukcji wykonalnej za pomocą linijki i cyrkla, która umożliwiałaby przejście od sześcianu o danej krawędzi do sześcianu o objętości dwa razy większej.

Nie wiemy, jakie były dalsze koleje tej epidemii. Musiała się niewątpliwie wreszcie skończyć, mimo niewykonania zalecenia wyroczni. Faktem jednak jest, że kostka ta nie dawała spokoju wielu pokoleniom. Otrzymano w ten sposób wiele oryginalnych metod rozwiązania tego problemu: za pomocą linijki i cyrkla w sposób przybliżony, a za pomocą innych narzędzi pomocniczych – w sposób dokładny.

Już Hipokrates z Chios poświęcił wiele uwagi rozwiązaniu problemu delijskiego i doszedł do wniosku, że problem ten sprowadza się właściwie do znalezienia tzw. dwóch średnich proporcjonalnych. Oto wyjaśnienie jego metody.

Weźmy pod uwagę dowolną proporcję liczbową:

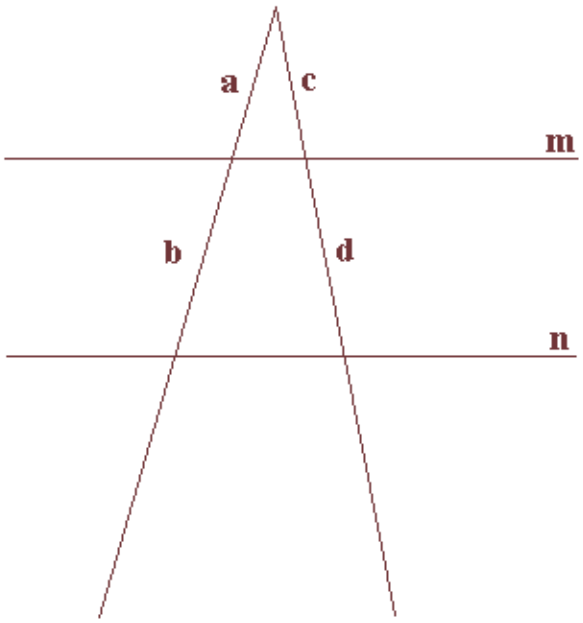
$$a : b = c : d$$

***a, d* – wyrazy skrajne**
***b, c* – wyrazy środkowe proporcji**

Warunkiem prawdziwości proporcji jest równość iloczynu wyrazów skrajnych i iloczynu wyrazów środkowych:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Grecy jednak rozwiązywali proporcje w postaci odcinkowej. Jeżeli *a, b, c, d* oznaczają odcinki, to proporcjonalność tych odcinków określa twierdzenie Talesa, które brzmi: jeżeli ramiona kąta przetniemy dwiema równoległymi, to odcinki wyznaczone na jednym ramieniu będą odpowiednio proporcjonalne do odcinków na drugim ramieniu. (rys. 1)



$m \parallel n$

$a : b = c : d$

Przypuśćmy, że znamy trzy z tych odcinków, np.: *a, b, c* – i szukamy tzw. czwartego proporcjonalnego, nazwijmy go *x*. Arytmetyczne rozwiązanie polega na wyszukiwaniu *x* z proporcji:

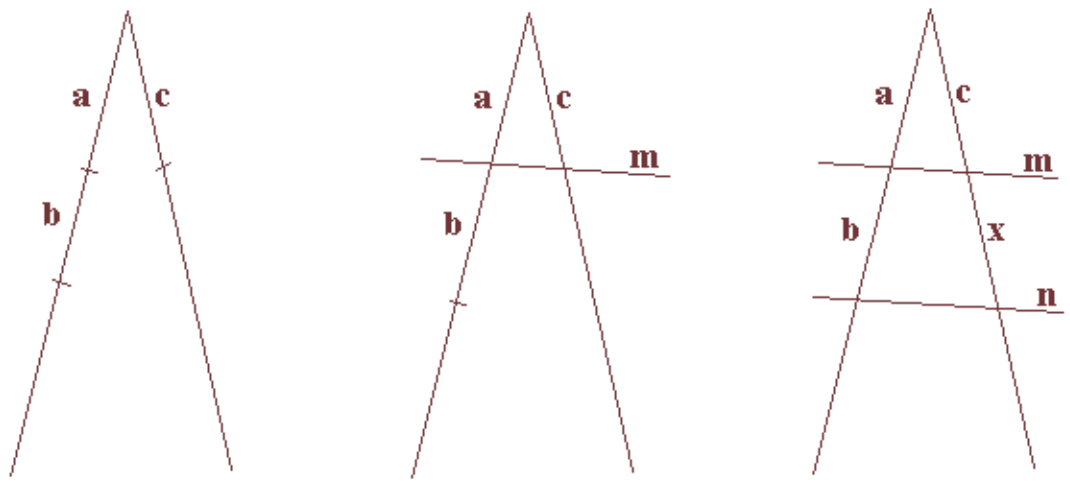
$$a : b = c : x$$

stąd

$$ax = bc$$

$$x = \frac{bc}{a}$$

Grecy znajdowali *x* za pomocą następującej prostej konstrukcji:



a : b = c : x

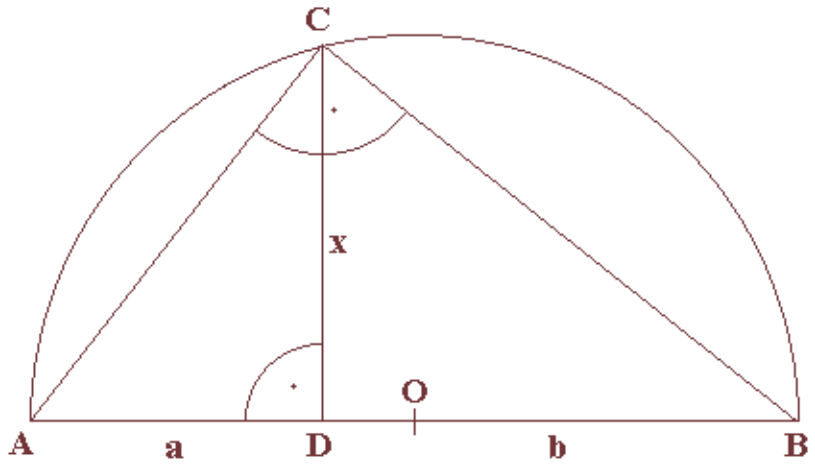
Odłóżmy na jednym ramieniu kąta, począwszy od wierzchołka, kolejno odcinki *a* i *b*, na drugim zaś – również od wierzchołka – odcinek *c*. Przeprowadźmy następnie prostą *m* przez punkty końcowe odcinka *a* i *c* – i wreszcie przez punkt końcowy odcinka *b* prostą *n* równoległą do *m* ($n \parallel m$). Prosta *n* wyznaczy na drugim ramieniu szukany odcinek *x* będący czwartym odcinkiem proporcjonalnym do trzech danych odcinków *a, b, c*.

Jeżeli w proporcji wyrazy środkowe są jednakowe, np.: *a : b = b : c*, to *b* nazywamy wyrazem średnim proporcjonalnym. Jak znajduje się wyraz średni proporcjonalny?

Niech będzie proporcja *a : x = x : b;* *x* – wyraz średni proporcjonalny. Oto rozwiązanie algebraiczne: $x^2 = ab$;
Ograniczamy się tu do liczb nieujemnych.

$$x = \sqrt{ab}$$

Konstrukcja średniej proporcjonalnej opiera się na twierdzeniu o wysokości w trójkącie prostokątnym. Wychodząc mianowicie z podobieństwa odpowiednich trójkątów, można udowodnić, że wysokość wykreślona z wierzchołka kąta prostego w trójkącie prostokątnym jest średnią proporcjonalną odcinków wyznaczonych przez tę wysokość na przeciwprostokątnej. Stąd wynika następująca konstrukcja:



a : x = x : b

$$x^2 = ab$$

$$x = \sqrt{ab}$$

1. **przeciwprostokątną AB budujemy z sumy odcinków *a* i *b***
2. **na przeciwprostokątnej wystawiamy z punktu O półokrąg Talesa**
3. **z punktu D podziału przeciwprostokątnej na odcinki *a* i *b* wystawiamy do niej prostopadłą DC aż do przecięcia z półokręgiem Talesa w punkcie C.**

CD będzie szukaną średnią proporcjonalną odcinków *a* i *b*. Wynika to z podanego twierdzenia, gdyż ACB jest trójkątem prostokątnym, a CD jego wysokością.

Znajdowanie docinka *x* spełniającego proporcję *a : x = x : b* starożytni nazywali również „wstawianiem" średniej proporcjonalnej między odcinki *a* i *b*. Analogicznie do tego nazywali wstawianiem dwóch średnich proporcjonalnych *x* i *y* między dwa odcinki *a* i *b* następującą proporcję złożoną:

$$a : x = x : y = y : b$$

Można ją rozbić na dwie proporcje proste:

$$a : x = x : y \qquad x : y = y : b$$

Teraz można wykazać, że problem delijski sprowadza się do znalezienia dwóch średnich proporcjonalnych. Przypuśćmy, że mamy podwoić sześcian o krawędzi *a*. Wstawmy dwie średnie proporcjonalne *x* i *y* między dwa odcinki: *a* i *2a*. Znajdziemy je z proporcji:
$a : x = x : y = y : 2a$
Otrzymujemy z niej dwie proporcje:

$$a : x = x : y$$
$$x : y = y : 2a$$

Z pierwszej mamy:

$$ay = x^2$$

czyli

$$y = \frac{x^2}{a}$$

z drugiej:

$$y^2 = 2ax$$

Po podstawieniu $y = \frac{x^2}{a}$ **otrzymamy:**

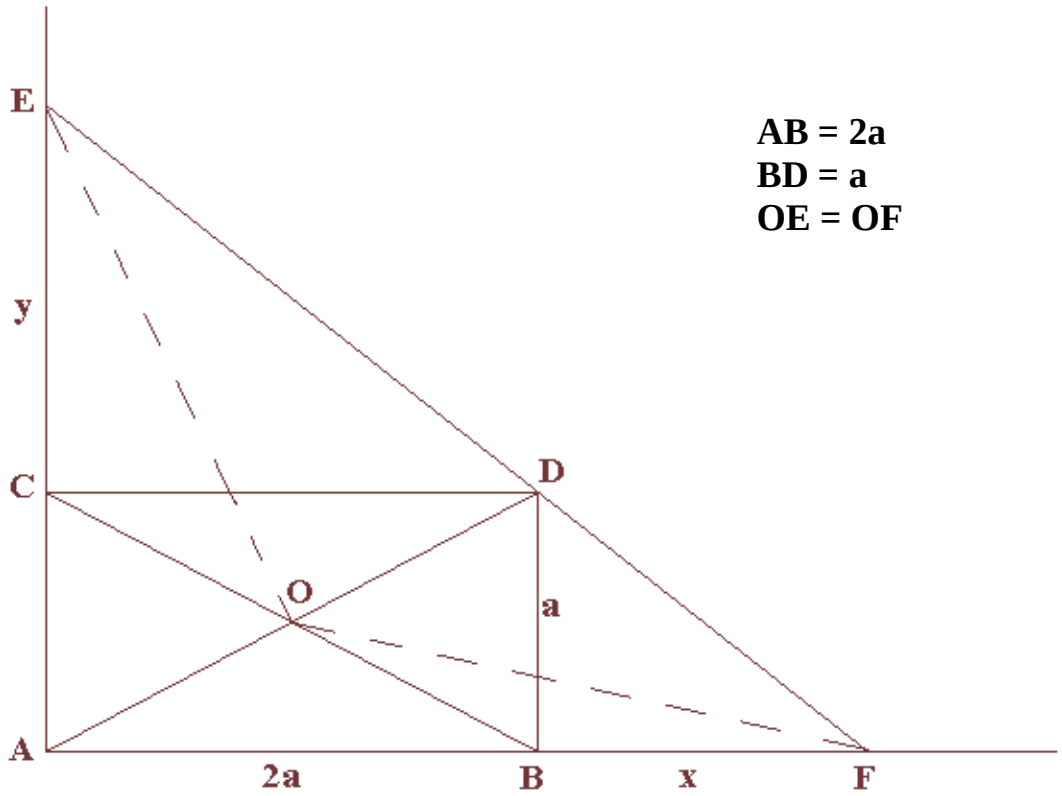
$$\left(\frac{x^2}{a}\right)^2 = 2ax$$
$$x^4 = 2a^3x$$

i ostatecznie

$$x^3 = 2a^3$$

Wykazaliśmy, że jeżeli między dwa odcinki: *a* (krawędź sześcianu) i *2a* – wstawimy dwie średnie proporcjonalne, to pierwsza z nich będzie krawędzią sześcianu, którego objętość będzie dwukrotnie większa od objętości pierwotnego sześcianu.
Dlatego też poszukiwania matematyków starożytnych zmierzały do znalezienia konstrukcji na wyznaczenie dwóch średnich proporcjonalnych. Istnieją rozmaite konstrukcje, których znalezienie przypisuje się Platonowi, Archytasowi, Menechmosowi i innym. Oto jedna z najprostszych, znaleziona przez VI Apolloniusza z Pergi.

Oznaczmy długość krawędzi danego sześcianu przez *a* i zbudujmy prostokąt, którego podstawa wynosi *2a*, wysokość zaś *a*.



BD : BF = BF : CE = CE : CD

Przedłużmy podstawę i wysokość, jak na rysunku
i wyznaczmy punkt O przecięcia przekątnych prostokąta. Przeprowadzimy teraz przez D prostą EF w ten sposób, by odpowiednie jej punkty przecięcia z przedłużeniami podstawy i wysokości prostokąta – E i F znalazły się w jednakowej odległości od O,
a więc OE = OF. Można udowodnić, że w tym przypadku zajdzie proporcja:
BD : BF = BF : CE = CE : CD lub też oznaczając boki prostokąta przez *a* i *2a* i przyjmując BF = *x*, CE = *y*, otrzymamy:

$$a : x = x : y = y : 2a$$

Otrzymaliśmy proporcję identyczną z wyżej rozpatrywaną. Stąd też wnioskujemy, że odcinek BF = *x* stanowi rozwiązanie naszej konstrukcji. Czyli, sześcian o krawędzi BF = *x* będzie miał objętość dwukrotnie większą od objętości sześcianu o krawędzi *a*.
Czyżby więc można było dojść za pomocą konstrukcji platońskiej do rozwiązania problemu delijskiego? Chcąc odpowiedzieć na to pytanie, należy zastanowić się, czy wszystkie wymienione w zadaniu czynności konstrukcyjne są wykonalne za pomocą linijki i cyrkla. Dojdziemy do

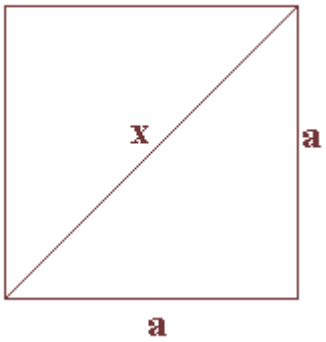
wniosku, że wszystkie z wyjątkiem jednej: wykreślenia prostej EF w ten sposób, by OE równało się OF. Czynność tę możemy wykonać tylko z pewnym przybliżeniem, obracając prostą EF dokoła D w płaszczyźnie rysunku tak długo, aż stwierdzimy za pomocą cyrkla, że OE w przybliżeniu równa się OF. Można też zbudować pewne mechanizmy ułatwiające wykreślenie naszej prostej. Nie zmieni to jednak faktu, że podane rozwiązanie nie odpowiada założeniom konstrukcji platońskiej i może służyć jedynie do wyznaczenia przybliżonych wartości poszukiwanej krawędzi.

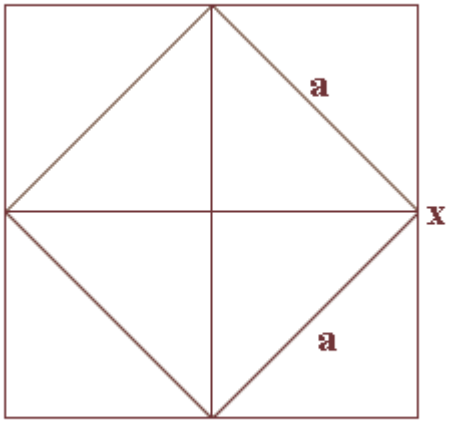
Dziś wiemy, co jest przyczyną tego, że konstrukcja problemu delijskiego za pomocą linijki i cyrkla jest niemożliwa. Wystarczy w tym celu znaleźć jego algebraiczne rozwiązanie.

Aby jednak poznać istotę trudności, jest wskazane rozwiązać najpierw prostsze zagadnienie: zbudować kwadrat, którego pole byłoby dwukrotnie większe od pola danego kwadratu.

Oznaczmy bok danego kwadratu przez *a*, szukanego zaś przez *x* (rys.). Chcemy więc, aby $x^2 = 2 \cdot a^2$. Napiszmy to teraz w postaci $x^2 = a^2 + a^2$ i przypomnijmy sobie twierdzenie Pitagorasa.

Nasuwa się natychmiast następująca myśl: jeżeli zbudujemy trójkąt prostokątny, którego obie przyprostokątne będą miały długość *a*, to przeciwprostokątna da nam długość boku szukanego kwadratu, gdyż wtedy $x^2 = a^2 + a^2$.





$$x^2=2a^2$$

I tak należy postąpić (rys.). Konstrukcja ta doprowadziła nas zresztą do tego, że kwadrat wystawiony na przekątnej kwadratu jest dwukrotnie większy od pierwotnego kwadratu, co jest widoczne z rys. Całą konstrukcję można wykonać za pomocą linijki i cyrkla.

Zupełnie inaczej jest z podwojeniem sześcianu. Oznaczmy długość krawędzi danego sześcianu przez *a*, długość zaś szukanego przez *x*. Otrzymamy następujące równanie dla wyznaczenia naszej niewiadomej:

$$x^3 = 2 \cdot a^3 \qquad \text{lub} \qquad x^3 = a^3 + a^3$$

Nie mamy jednak, niestety żadnego odpowiednika twierdzenia Pitagorasa dla przestrzeni, który miałby tu zastosowanie. Nie ratuje też sytuacji, jeżeli wyliczymy $x = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$ **, gdyż otrzymany wynik jest jedną z tych wartości, co do których Gauss i inni matematycy XIX w. wykazali, że nie dadzą się skonstruować za pomocą linijki i cyrkla.**
Mianowicie wykazali, że za pomocą linijki i cyrkla można skonstruować tylko takie odcinki, których długość otrzymuje się z długości danych odcinków przez wykonanie na nich skończonej liczby działań: dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie i wyciąganie pierwiastka kwadratowego. Natomiast $\sqrt[3]{2}$ **(pierwiastka stopnia trzeciego) nie da się w ten sposób otrzymać. Dlatego też bezskuteczne były wszystkie usiłowania rozwiązania problemu delijskiego – życzenie bogów musiało pozostać nie spełnione.**

Literatura:

Edward Kofler – Z dziejów matematyki
A.P. Juszkiewicz – Historia matematyki

Opracowała:
Alina Wierus