BRYŁA SZTYWNA

Zestaw foliogramów

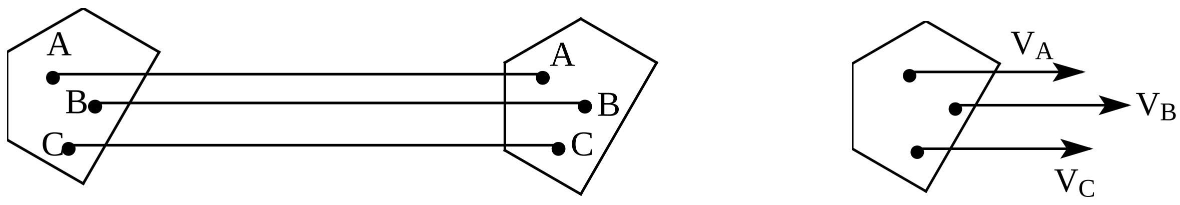
Opracowała Lucja Duda

II Liceum Ogólnokształcące w Pabianicach

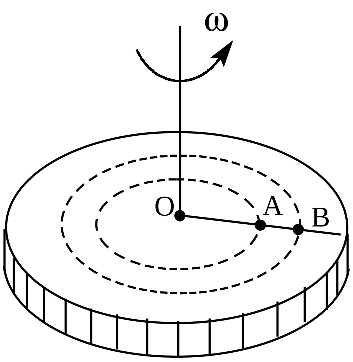
Pabianice 2003

Bryłą sztywną nazywamy ciało, które nie deformuje się pod wpływem sił zewnętrznych. Poszczególne części bryły sztywnej pozostają w niezmienionej wzajemnej odległości niezależnie od tego jak wielkie siły działają na to ciało.

Ruch postępowy bryły – dowolne punkty bryły doznają wzajemnie równych i równoległych przesunięć

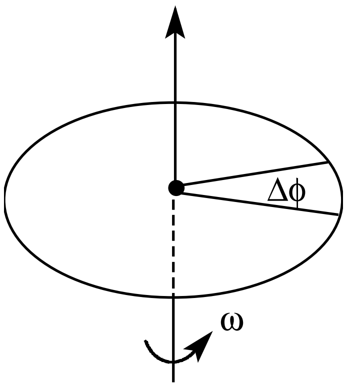


Ruch obrotowy bryły – wszystkie punkty bryły opisują okręgi, których środki leżą na wspólnej osi, zwanej osią obrotu



PRĘDKOŚĆ KĄTOWA

$$\vec{\omega} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} \qquad [\omega] = \left[\frac{rad}{s}\right] \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$



Reguła śruby prawoskrętnej
(korkociągu)

PRZYSPIESZENIE KĄTOWE

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} \qquad [\varepsilon] = \left[\frac{rad}{s^2}\right] \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

Przyspieszenie kątowe ma kierunek zgodny z kierunkiem i zwrotem wektora zmiany prędkości kątowej $\Delta\omega$

W przypadku ruchu obrotowego przyspieszonego $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} > 0$

W przypadku ruchu obrotowego opóźnionego $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} < 0$

RUCH POSTĘPOWY	RUCH OBROTOWY
Jednostajny	
$s = vt$ $v = \text{constans}$ $a = 0$	$\varphi = \omega t$ $\omega = \text{constans}$ $\varepsilon = 0$
Jednostajnie zmienny	
$s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$ $v = v_0 \pm at$ $a = \text{constans}$	$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$ $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$ $\varepsilon = \text{constans}$

$$\mathbf{S = \varphi r} \qquad \mathbf{v = \omega r} \qquad \mathbf{a = \varepsilon r}$$

ŚRODEK MASY

Gdy ciało sztywne znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym, siły ciężkości dzialające na różne części tego ciała można zastąpić łacznie siłą P = mg zaczepioną w środku masy tego ciała.
Wektor położenia środka masy jest określony wzorem:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} \qquad \vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$\vec{r}$ - wektory położenia poszczególnych punktów materialnych wchodzacych w skład masy
m - poszczególne masy

Współrzędne końca wektora R(x,y,z)

$$x_{śr} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad y_{śr} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad z_{śr} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

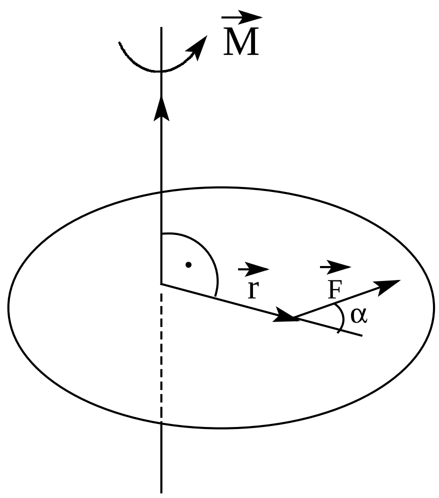
W jednorodnym polu grawitacyjnym **środek masy** jest jednocześnie **środkiem ciężkości** bryły

MOMENT SIŁY

Moment siły M jest równy iloczynowi wektorowemu wektora położenia i wektora siły.
Wektor położenia jest to wektor o początku w punkcie względem którego oblicza się moment siły i końcu w punkcie przyłożenia siły.

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} \qquad \left[\mathbf{M}\right] = \left[\mathbf{m} \cdot \mathbf{N}\right]$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{rF}\sin\alpha \qquad \alpha(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{F}})$$



Zwrot momentu siły zależy od tego, jaki kierunek obrotu nadałaby spoczywajacej bryle siła F, gdyby była jedyną siłą działającą na ciało.

Jeżeli bryła obraca się w **kierunku dodatnim kąta α** momentowi siły przypisujemy znak „+”, w kierunku przeciwnym „-”

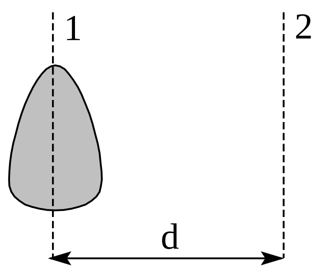
MOMENT BEZWŁADNOŚCI

Momentem bezwładności ciała obracającego się nazywamy sumę iloczynów mas poszczególnych punktów materialnych tego ciała przez kwadraty odległości tych punktów od osi obrotu

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \qquad [I] = [kg \cdot m^2]$$

Moment bezwładności zależy od wyboru osi obrotu, kształtu ciała i od sposobu rozmieszczenia masy ciała

TWIERDZENIE STEINERA



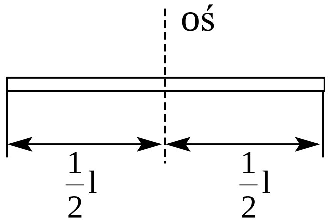
$$I_2 = I_1 + md^2$$

I_1 – moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy

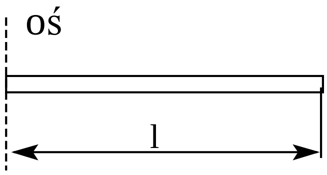
I_2 – moment bezwładności względem danej osi

MOMENTY BEZWŁADNOŚCI TYPOWYCH BRYŁ JEDNORODNYCH O MASIE M

Pręt

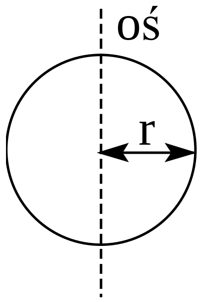


$$\mathbf{I = \frac{1}{12} ml^2}$$



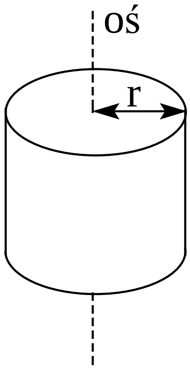
$$\mathbf{I = \frac{1}{3} ml^2}$$

Kula



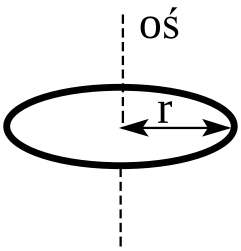
$$\mathbf{I = \frac{2}{5} mr^2}$$

Walec



$$\mathbf{I = \frac{1}{2} mr^2}$$

Obręcz



$$\mathbf{I = mr^2}$$

I ZASADA DYNAMIKI RUCHU OBROTOWEGO

Jeżeli na bryłę sztywną działa siła o momencie równym zeru lub działa kilka sił o wypadkowym momencie równym zeru, to bryła nie wykonuje ruchu obrotowego lub obraca się ze stałą prędkością kątową

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = 0$$

II ZASADA DYNAMIKI RUCHU OBROTOWEGO

Jeżeli na bryłę sztywną działają siły, których momenty sił nie równoważą się, to bryła sztywna porusza się ruchem jednostajnie zmiennym obrotowym z przyspieszeniem kątowym proporcjonalnym do wypadkowego momentu sił a odwrotnie proporcjonalnym do momentu bezwładności

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I} \qquad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

ENERGIA KINETYCZNA BRYŁY SZTYWNEJ

Energia kinetyczna punktu materialnego

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \qquad v = \omega r$$

$$E_k = \frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

Całkowita energia kinetyczna ciała sztywnego jest sumą energii kinetycznych wszystkich jego punktów

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$E_k = \frac{1}{2}\omega^2\left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots\right)$$

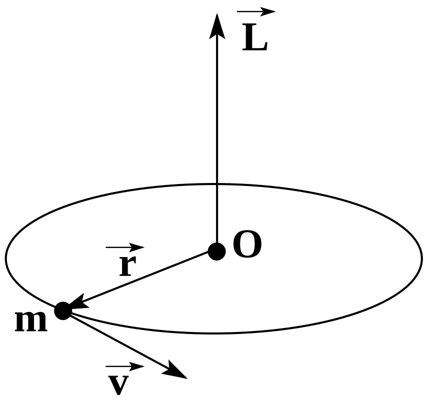
$$E_k = \frac{1}{2}\omega^2\left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\right)$$

$$E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$$

MOMENT PĘDU BRYŁY SZTYWNEJ

Dla punktu materialnego

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$



Dla bryły sztywnej

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

W ruchu obrotowym bryły wokół stałej osi, każdy punkt materialny reprezentujacy część bryły, porusza się po okręgu w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu. **Wektor pędu** każdego punktu jest w każdej chwili prostopadły do promienia okręgu.

$$J = \sum_{i=1}^{n} r_i m_i v_i \qquad v = \omega r$$

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i \omega r_i^2 \qquad J = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

$$J = I\omega \qquad \underline{\vec{J} = I\vec{\omega}}$$

W ruchu obrotowym bryły względem ustalonej osi obrotu moment pędu bryły względem tej osi jest równy iloczynowi **momentu bezwładności względem osi obrotu i prędkości kątowej**.

$$M = \varepsilon I \qquad J = I\omega$$

$$M = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} I \qquad \frac{\Delta J}{\Delta t} = I \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\underline{\vec{M} = \frac{\Delta\vec{J}}{\Delta t}}$$

Tylko nie zrównoważony moment siły może spowodować zmianę momentu pędu bryły sztywnej lub jeśli momenty sił działajacych na bryłę sztywną równoważą się lub nie działa żaden moment siły, to moment pędu bryły pozostaje nie zmieniony

$$\vec{M} = 0 \qquad \vec{J} = const \qquad \text{lub} \qquad I\omega = const.$$

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

RUCH POSTĘPOWY		**RUCH OBROTOWY**	
położenie	x	kąt obrotu	φ
prędkość	$v = \frac{dx}{dt}$	prędkość kątowa	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
przyspieszenie	$a = \frac{dv}{dt}$	przyspieszenie kątowe	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
masa	m	moment bezwładności	I
energia kinetyczna	$\frac{1}{2}mv^2$	energia kinetyczna	$\frac{1}{2}I\omega^2$
pęd	$p = mv$	moment pędu	$J = I\omega$
siła	F	moment siły	M
II zasada dynamiki	$F = ma$ $F\Delta t = \Delta p$	II zsada dynamiki	$M = I\varepsilon$ $M\Delta t = \Delta J$