Zadanie 2

Suma pierwszego, drugiego i trzeciego wyrazu ciągu geometrycznego (a_n) jest równa 7/4, liczby te są odpowiednio czwartym, drugim i pierwszym wyrazem rosnącego ciągu arytmetycznego (b_n).

a) wyznacz wzór na ogólny wyraz ciągu (c_n), gdy $c_n = b_n / a_n$
b) zbadaj monotoniczność ciągu (c_n)

Z treści zadania wynika, że mamy dane trzy pierwsze wyrazy ciągu geometrycznego, czyli
(a_n): a_1, a_2, a_3
Korzystając ze wzoru a_n – ciągu geometrycznego otrzymujemy:
$a_2 = a_1 * q_1$ i $a_3 = a_1 * q^2$

Suma $a_1 + a_2 + a_3 = 7/4$
$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 7/4$
Wiemy również, że ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym rosnącym, spełniającym następujące warunki:

$b_4 = a_1$
$b_2 = a_2$
$b_1 = a_3$

Korzystając ze wzoru na n-ty wyraz ciagu arytmetycznego, równania przyjmują postać:

$$\begin{cases} b_1 + 3r = a_1 \\ b_1 + r = a_1 q \\ b_1 = a_1 q^2 \end{cases}$$

Do tego układu dopisuję również równanie $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 7/4$
Mamy więc układ równań z 4-ma niewiadomymi. Rozwiązuję go metodą podstawiania.

$$\begin{cases} b_1 = a_1 q^2 \\ a_1 q^2 + 3r = a_1 \\ a_1 q^2 + r = a_1 q \ / * (-3) \\ a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 7/4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 q^2 + 3r = a_1 \\ \underline{-3a_1 q^2 - 3r = -3a_1 q} \end{cases}$$
$$-2a_1 q^2 = a_1 - 3a_1 q$$

$2a_1 q^2 - 3 a_1 q + a_1 = 0$
$a_1 (2q^2 - 3q + 1) = 0$
Iloczyn równa się zero $\Leftrightarrow$ gdy jeden z czynników równa się zero
$a_1 = 0$ nie spełnia warunków zadania

lub $2q^2 - 3q + 1 = 0$ Rozwiązuję równanie kwadratowe zupełne:

$\Delta = b^2 - 4ac = (- 3)^2 - 4 * 2 * 1 = 9 - 8 = 1$
$q = (-b - \sqrt{\Delta}) / (2*a) = (3 - 1) / (2 * 2) = 2 / 4 = ½$
$q' = (- b + \sqrt{\Delta}) / (2* a) = (3 + 1) / (2 * 2) = 4 / 4 = 1$

Wyznaczone wartości q podstawiam do równania

$\begin{cases} q = 1 / 2 \\ a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 7 / 4 \end{cases}$ lub $\begin{cases} q = 1 \\ a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 7/4 \end{cases}$

$\begin{cases} q = 1/ 2 \\ a_1 + 1 / 2 a_1 + ¼ a_1 = 7/4 \end{cases}$ $\begin{cases} q = 1 \\ a_1 + a_1 + a_1 = 7/4 \end{cases}$

$\begin{cases} q = ½ \\ 7/4a_1 = 7/4 / (7/4) \end{cases}$ $\begin{cases} q =1 \\ 3a_1 = 7/4 / 3 \end{cases}$

$\begin{cases} q = 1/2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} q = 1 \\ a_1 = 7/12 \end{cases}$

Wyznaczam wyrazy ciągu b_n
$b_1 = a_1 q^2 = 1 * (1/2) = ¼$
$b_1 = a_2 = a_1 q = 1 * ½ = ½$

Obliczam różnicę tego ciągu $r = b_2 - b_1 = ½ - ¼ = ¼$
Ponieważ $r =1/4 > 0$ więc ten ciąg jest ciągiem arytmetycznym rosnącym.
Rozpatruję drugie równanie: $q = 1$, $a_1 = 7/12$

$b_1 = a_1 q^2 = 7/12 * 1 = 7/12$
$b_2 =a_1 q = 7/12 * 1 = 7/12$ Otrzymany ciąg b_n nie jest ciągiem arytmetycznym rosnącym

Tak więc gdy $a_1 = 1$ i $q = ½$ to
$a_n = a_1 q^{n-1}$
$a_n = 1 * (½)^{n-1}$ $a_n = (½)^{n-1}$
Wyznaczam n-ty wyraz ciągu arytmetycznego b_n

$b_n = b_1 + (n - 1) * r$
$b_n = ¼ + (n - 1) * ¼ = ¼ (1 + n - 1) ¼ * n$
Wyznaczam ciąg (c_n)

$c_n = b_n / a_n = (¼ * n) / (½)^{n-1} = (¼ * n) / (1/2)^n *(1/2)^{-1} = (n * 2^n) / 8$

b)Aby zbadać monotoniczność ciągu c_n wyznaczam:
$c_{n+1} = ((n +1) * 2^{n+1})) / 8$

Badam różnicę $c_{n+1} - c_n = (n+1)*2^{n+1}/8 - n*2^n = 2^n(n+2)/8$

Liczba $2^n (n+2)/8 > 0$ dla każdego $n \in N^+$, więc na podstawie definicji ciągu rosnącego wynika, że ciąg (c_n) jest rosnący,